E.N.S.E.T. section B" session 1987

DURÉE : 3 heures

L'épreuve est constituée de trois problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

Soit (φ_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

On suppose cette suite convergente sur $[0, 1]$, sa limite est la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t)$.

L'objet de ce problème est l'étude de la suite de fonctions (f_n) définies dans $[0, 1]$ pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) = \varphi_n(t) \sin^2 \dfrac{\pi}{t} & \text{si } t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right], \\ f_n(t) = 0 & \text{si } t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[. \end{cases}$$

1° Montrer que la suite (f_n) admet une fonction limite f sur $[0, 1]$. Déterminer f en utilisant φ.

2° Soit φ_n définie sur $[0, 1]$ par $\varphi_n(t) = \dfrac{2nt^2}{2nt + 1}$.

a. Déterminer les fonctions limites φ et f. Ces fonctions sont-elles continues sur $[0, 1]$?

b. Déterminer $\operatorname{Sup}\left\{ |\varphi_n(t) - t| ; \quad t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \right\}$.

c. Montrer que $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ si $t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.

d. Déduire de ce qui précède que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

Tournez la page S. V. P.

3° Soit φ_n définie sur $[0, 1]$ par $\varphi_n(t) = \dfrac{n}{n(t+1)+1}$.

a. Déterminer la fonction φ. La convergence de φ_n vers φ est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

b. La fonction f est-elle continue sur $[0, 1]$? Examiner si la convergence de la suite f_n est uniforme sur $[0, 1]$.

4° Les fonctions φ_n étant toujours supposées continues sur $[0, 1]$, on suppose en outre que la convergence de la suite (φ_n) est uniforme sur $[0, 1]$ et que $\varphi(0) = 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

DEUXIÈME PROBLÈME

On désigne par M_n l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels, comportant n lignes et n colonnes (n entier > 1). La matrice unité de M_n est désignée par I.

A étant un élément donné de M_n, on désigne par E_A l'ensemble de tous les éléments T de M_n qui vérifient $TA = AT$.

1° Montrer que E_A est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel M_n. Montrer que si S et T sont deux éléments de E_A, le produit ST est un élément de E_A.

Que peut-on dire de l'inverse d'un élément T de E_A, si cet élément est inversible?

2° On suppose dans cette question $n = 2$.

a. Déterminer E_A lorsque A est la matrice diagonale $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, α et β étant deux réels distincts donnés.

Montrer que, dans ce cas, l'ensemble des deux matrices I et A constitue une base de l'espace vectoriel E_A.

b. Montrer que ce dernier résultat reste vrai lorsque la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes.

c. Étudier le cas où A admet une valeur propre réelle double.

3° On suppose à présent que n est un entier quelconque.

a. A étant une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont n réels donnés distincts deux à deux, déterminer E_A.

Montrer que la famille I, A, $A^2, \ldots A^{n-1}$ constitue une base de l'espace vectoriel E_A.

b. Montrer que ce résultat reste vrai lorsque A est une matrice admettant n valeurs propres réelles distinctes deux à deux.

c. On suppose toujours que A admet n valeurs propres réelles distinctes deux à deux. Montrer qu'il existe un système unique de réels $(\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_{n-1})$ tel que $A^n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j A^j$ (avec $A^0 = I$).

Déterminer ces coefficients μ_j en fonction des coefficients du polynôme caractéristique de A.

TROISIÈME PROBLÈME

Étant donné deux réels quelconques a et b et une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on considère le problème $P_{a,b}(f)$ qui consiste à trouver $t \longrightarrow x(t)$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = f(t)$ qui vérifie les conditions initiales $\begin{cases} x(0) = a \\ x'(0) = b. \end{cases}$

On désigne par $G_{a,b}$ la solution *unique* de ce problème, et par $g_{a,b}$ la restriction de $G_{a,b}$ à l'intervalle $[0, 2\pi]$. La fonction $g_{a,b}$ est ainsi la solution *unique* de

$$P^*_{a,b}(f) \begin{cases} x''(t) + x(t) = f(t) & \forall t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = a \\ x'(0) = b. \end{cases}$$

Le problème porte sur la détermination de solutions $G_{a,b}$ périodiques lorsque f est périodique.

Tournez la page S. V. P.

page 56 E.N.S.E.T. 1987 Section B"-

1° Soit ω un réel strictement positif et distinct de 1. On désigne par f la fonction 2π - périodique telle que :

$$f(t) = \sin \omega t \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi],$$
$$f(t) = -\sin \omega t \quad \text{si} \quad t \in]-\pi, 0[.$$

a. Tracer, dans les deux cas particuliers $\omega = \frac{1}{2}$ et $\omega = \frac{4}{3}$, le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.

b. Déterminer, lorsque ω est arbitraire, la valeur explicite de $f(t)$ sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer la solution sur $[0, \pi]$ de

$$\begin{cases} x'' + x = f \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Déterminer ensuite la fonction $g_{0,0}$ solution de $P^*_{0,0}(f)$.

Calculer $g_{0,0}(2\pi)$ et $g'_{0,0}(2\pi)$.

2° On se place dans le cas $\omega = 1$.

f est définie par $f(t) = \sin t \quad \text{si } t \in [0, \pi]$
$= -\sin t \quad \text{si } t \in]-\pi, 0[$

et f est 2π - périodique.

Répondre aux questions *b* et *c* précédentes pour cette fonction f.

3° *a.* Soit f quelconque, continue sur $\mathbb{R}$, et $G_{0,0}$ la solution de $P_{0,0}(f)$. On désigne par h la restriction de $G_{0,0}$ à $[2\pi, 4\pi]$.

Montrer que la fonction définie par $s \longrightarrow h(s + 2\pi)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est la solution unique d'un problème $P^*_{a,b}(f_1)$ pour une fonction f_1 et pour deux réels a et b à préciser.

b. On suppose en outre f 2π - périodique. Déduire de ce qui précède des conditions nécessaires et suffisantes portant sur a et b pour que $G_{0,0}$ soit 2π - périodique.

Que peut-on conclure en utilisant les résultats des questions 1 et 2 ?

4° La fonction f étant quelconque, continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe la fonction F telle que

$$(*) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad F(t) = \int_0^t f(s) \sin(t - s)\, ds.$$

a. Montrer que cette fonction F est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est la solution unique d'un problème $P_{a,b}(f)$ que l'on précisera.

b. On suppose que f est 2π - périodique. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes faisant intervenir deux coefficients de Fourier de f pour que F soit 2π - périodique.

5° On suppose f 2π - périodique, paire et continûment dérivable dans $\mathbb{R}$. En utilisant F définie par (*), exprimer la solution $G_{0,0}$ du problème $P_{0,0}(f)$ en faisant intervenir les coefficients de Fourier de f à l'intérieur d'une série.

Retrouver ainsi les conditions pour que $G_{0,0}$ soit 2π - périodique.

6° *Application.*

On désire calculer la somme, pour $t \in [0, \pi]$, de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt - \cos t}{(4n^2 - 1)^2}.$$

À cet effet, on commencera par développer en série de Fourier la fonction f introduite dans la question 2°. On utilisera, comme en 5°, la fonction F définie par (*), ainsi que l'unicité de la solution d'un problème $P^*_{a,b}(f)$.

• • •
•

E.N.S.E.T.
Section B"-